

閾値自己回帰モデルのベイズ推定 —米国金利データへの応用—

砂 田 洋 志

(人文学部 総合政策科学科)

1. はじめに

時系列モデルの分類方法は幾つかあり、線形性による分類はその1つである。刈屋＝照井 (1997) や刈屋 (2003) に従えば、定常確率過程 $\{x_t\}$ が線形であるとは平均0、分散 σ^2 のIID (独立かつ同一の分布に従う) 過程 $\{\varepsilon_t\}$ 、 $\sum_{j=0}^{\infty} b_j^2 < \infty$ をもつ数列 $\{b_j\}$ 、および x_t の平均数列 $\{\mu_t\}$ が存在して

$$x_t - \mu_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$$

と表現される場合である。実証分析に広く用いられているARモデルはどうであろうか。(弱)定常性を有するARモデルはMA (∞) で記述することも可能であるから、線形性の条件を満たしそうである。たしかに誤差項がIIDと仮定されていれば線形性を有する。では誤差項が単に無相関な確率過程であると仮定されている場合はどうであろうか。¹ 誤差項に正規分布が仮定されていなければ、ARモデルは単なる定常で無相関な確率過程の一次結合で記述されるだけなので非線形となる。² (弱)定常性を有するARMAモデルもMA (∞) で書き直せるが、同様の理由で誤差項が単に無相関な確率過程と仮定されている場合は非線形である。³

非線形モデルは線形モデル以外の全てのモデルであるから、多種多様である。以下に代表的な非線形モデルを挙げておこう。4番目と5番目のモデルはファイナンスでも広く利用されている。

- (1) TAR (閾値自己回帰) モデル
- (2) 双線形モデル
- (3) 指数的自己回帰モデル
- (4) ARCHモデル、GARCHモデル
- (5) 確率的ボラティリティーモデル

本論文ではTAR (Threshold Auto Regressive Model) モデルを扱う。これは閾値を組み込んだ自己回帰モデルである。TARモデルは非線形モデルの一つであり、Tong (1978)、Tong＝Lim

(1980) によって提案された。⁴ 数式による説明は後述するが、もともとのモデルは y に関する自己回帰モデルがあって、 y とは別の確率過程 $\{X_t\}$ の過去の値によってそのモデル（パラメータの値や自己回帰の次数）が変化するというものである。つまり閾値によって区切られた複数の区間を考え、過去の値が異なる区間に含まれると、モデルも変化する。その特殊形として y 自身の過去の値がとる値によってモデルも変化するものが考案され、自己励起的な閾値自己回帰モデル（Self Exciting Threshold Auto Regressive, SETARモデル）と呼ばれている。現在はこちらが主流なので、SETARを単にTARと呼ぶことが多い。

閾値が離散的であることにより標本理論に基づいた推定方法では簡単に推定できない。しかしTsay（1989）などにより標本理論に基づいた推定方法が考案された。その後にGeweke=Terui（1993）やChen=Lee（1995）によりベイズ統計学に基づいた推定方法が考案された。さらに閾値の問題を平滑化によって解決したSTAR（Smooth Transition Auto Regressive）モデルというものも考案されている。

標本理論に基づく推定を行う研究者が多いこともあって、実証研究はそれほど盛んでない。しかしながらPfann=Schotman=Tschernig（1996）は金利モデルに応用している。またBalke=Fomby（1997）が閾値共相分の有無を検定する方法を提案した後に、Martens=Kofman=Vorst（1998）とForbes=Kalb=Kofman（1997）は閾値を用いたモデルを株価指数と同先物における裁定取引の分析へ応用している。また日本の金融データに適用した例として刈屋=照井（1997）、刈屋（2003）が挙げられる。

日本においてTARモデルはそれほど普及しているとはいえない。そこで本論文はTARモデルを解説するとともに、実際のデータを用いてベイズの立場から実証分析することが目的である。この後の論文の構成は以下の通りである。まず第2節では数式を用いてTARモデルを説明する。第3節ではベイズ統計学に基づいた2種類の推定方法を説明する。第4節では金利データを対象にした実証分析を紹介する。第5節で結論を述べる。

2. 一変量TARモデルの概説

一般に次数が p のARモデルは以下のように書ける。

$$(1) \quad y_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + \cdots + b_p y_{t-p} + u_t$$

TARモデルではAR (p) に従う時系列モデル (1) が d 期前の価格 y_{t-d} のとる値によって状態を変化させるのに伴い、そのモデルも変化させる。以下には状態が R 個ある場合、つまりパラメータが R 通りに変化する場合を数式で表してみよう。

$$(2) \quad y_t = b_0^{(j)} + b_1^{(j)} y_{t-1} + b_2^{(j)} y_{t-2} + \cdots + b_p^{(j)} y_{t-p} + u_t^{(j)} \quad u_t^{(j)} \sim N(0, \sigma_j^2) \quad r^{(j-1)} < y_{t-d} \leq r^{(j)}$$

ただし上付き添え字 j は状態を表し、 $j=1,2,\dots,R$ である。つまり y_{t-d} のとり値の範囲として $(r^{(0)}, r^{(1)}], (r^{(1)}, r^{(2)}], \dots, (r^{(j-1)}, r^{(j)}], \dots, (r^{(R-1)}, r^{(R)}]$ の R 個を考え、それぞれを状態と考える。 y_{t-d} がどの状態に属するかによって、時点 t におけるモデルのパラメータ、そして自己回帰の次数までもが変化すると考えるのである。この様にラグの次数も状態ごとに変えることもできるが、本論文では単純化のために状態の個数が2種類、自己回帰部分のラグの次数が常に1という単純な自己回帰モデルを扱い、実証分析に利用する。数式で書けば以下の様になる。

$$(3) \quad \begin{aligned} y_t &= b_0^{(j)} + b_1^{(1)} y_{t-1} + u_t^{(1)} \quad u_t^{(1)} \sim N(0, \sigma_1^2) & y_{t-d} \leq r \\ y_t &= b_0^{(2)} + b_1^{(2)} y_{t-1} + u_t^{(2)} \quad u_t^{(2)} \sim N(0, \sigma_2^2) & r < y_{t-d} \end{aligned}$$

(3)は状態によって回帰係数の値だけが変化すると仮定されたモデルである。

3. 推定方法

自己回帰モデルに閾値を組み込んだTARモデルの場合、最尤法を単純に用いるだけでは推定できないことから、推定方法はいろいろと工夫されてきた。その理由は以下の通りである。(3)では閾値 r によってデータが2つに分けられるが、僅かしか異ならない2つの r を考えた場合、2つの閾値は異なるにもかかわらず同じ分け方になってしまう。したがって尤度関数は r のために階段関数となってしまう、尤度を最大化するパラメータは一意に定まらないからである。同様に遅れ変数 d であるが、ラグの個数であるから自然数を考えることとなる。やはり尤度関数は階段関数となってしまう、同じ問題が発生する。

Tsay (1989) は図を用いた推定方法を考案した。その一方でGeweke=Terui (1993) はベイズ統計学の基づいた閾値(r)と遅れ変数(d)の推定方法を提案した。さらにChen=Lee (1995) がベイズ統計学に基づいたパラメータの推定方法を提案した。現在では標本理論とベイズ統計学が並存する形で多様なモデルの推定が行なわれている。

3.1ではベイズ統計学に基づいて閾値 r と遅れ変数 d を解析的に推定する方法を紹介する。Geweke=Terui (1993) は閾値 r と遅れ変数 d の結合事後分布を利用して y の予測値を計算している。3.2ではMCMC (マルコフチェーン・モンテカルロ) 法による推定方法を紹介する。MCMC法とはベイズ統計学に基づいた推定方法の1つであり、乱数を用いてパラメータを推定する方法である。

煩雑な表記を避けるために、以後の説明では行列を用いる。行列を用いて(3)を記述すれば以下ようになる。

$$(3') \quad \begin{aligned} y_1^* &= X_1^* b^{(1)} + u_1 \quad u_1 \sim N(0, \sigma_1^2) & y_{t-d} \leq r & (-\infty = r^{(0)} < y_{t-d} \leq r^{(1)}) \\ y_2^* &= X_2^* b^{(2)} + u_2 \quad u_2 \sim N(0, \sigma_2^2) & r < y_{t-d} & (r^{(1)} < y_{t-d} \leq r^{(2)} = \infty) \end{aligned}$$

ただし y^*_1 は y_{t-d} が r 以下の場合の y_t だけを集めたベクトルであり、 X^*_1 は y^*_1 の各要素の 1 時点前の値を集めたベクトルと定数項ベクトルを並べた 2 列の行列である。同様に y^*_2 は y_{t-d} が r よりも大きい場合の y_t だけを集めたベクトルであり、 X^*_2 は y^*_2 の各要素の 1 時点前の値を集めたベクトルと定数項ベクトルを並べた 2 列の行列である。この様にデータを y_{t-d} によって分類した後は通常の回帰モデルとなる。

自己回帰モデルの次数を p と一般化した場合の y^*_j と X^*_j についても説明しておこう。⁵ TAR モデルでは t 時点ではなく $t-d$ 時点の値、つまり y_{t-d} の値が $r^{(j-1)}$ よりも大きく $r^{(j)}$ 以下にあると、時点 t では状態 j に属して $b^{(j)}$ というパラメータを有する自己回帰モデルに従うと考える。したがって y^*_j 、 X^*_j ($j=1, 2$) といった変数を以下の様に決めればよい。

$\{y_h, y_{h+1}, \dots, y_{T-d}\}$ を小さい方から大きい順に並べ替えた場合の、小さい方から i 番目の y_t の時点を π_i と記述しよう。ただし $h = \max(1, p+1-d)$ である。この場合、データ総数を T 、第 1 状態にあるデータ数の総数を s_1 と記述すれば、第 1 状態における自己回帰モデルの y^*_1 は $\pi_1 + d$ から $\pi_{s_1} + d$ のデータ $\{y_{\pi_1+d}, y_{\pi_2+d}, \dots, y_{\pi_{s_1}+d}\}'$ 、 X^*_1 は $\{x_1, x_2, \dots, x_{s_1}\}'$ 、第 2 状態における自己回帰モデルの y^*_2 は $\pi_{s_1+1} + d$ から $\pi_{T-p} + d$ のデータ $\{y_{\pi_{s_1+1}+d}, y_{\pi_{s_1+2}+d}, \dots, y_{\pi_{T-p}+d}\}'$ 、 X^*_2 は $\{x_{s_1+1}, x_{s_1+2}, \dots, x_{T-p}\}'$ である。ただし $x_i = \{1, y_{\pi_i-1+d}, y_{\pi_i-2+d}, \dots, y_{\pi_i-p+d}\}'$ ($i=1, 2, \dots, T-p$) とする。この様にデータを作成すれば状態ごとでは通常の回帰モデルとなり、(3') の様に行列を用いて記述できる。

3.1 解析的な推定方法

状態が 2 種類の 1 変量モデルの推定方法であるが、事前分布として以下の通り無情報事前分布を仮定して事後分布を導出しよう。

$$p(\mathbf{b}^{(j)}, \sigma_j^2) = p(\mathbf{b}^{(j)}) p(\sigma_j^2) \propto (\sigma_j^2)^{-1}$$

ただし $\mathbf{b}^{(j)} = (b_0^{(j)}, b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, \dots, b_p^{(j)})'$ 、 σ_j^2 $j=1, 2$ である。また閾値 r と遅れ変数 d についてはそれぞれ一様分布を仮定する。この場合の r, d の結合周辺事後分布は、

$$(4) \quad p(r, d|y) \propto \prod_{j=1}^2 \pi^{-\frac{j}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu_j}{2}\right) \left\{(\nu_j s_j^2)^{-\frac{j}{2}}\right\} |X_j^* X_j^*|^{-\frac{1}{2}} \quad j=1, 2.$$

である。ただし $\nu_j = T_j - k - 1$ 、 $\hat{B}_j = (X_j^* X_j^*)^{-1} X_j^* y_j^*$ 、 T_j = 状態 j に属するデータの個数、 k = 説明変数の個数とする。

閾値の候補としてはせいぜいデータの上限から下限までの値を考えれば良い。しかし閾値として極端に小さな値や大きな値を考える場合は一方のデータが数個になり、推定値が不安定となる。したがってたとえば 5 番目に小さいデータの値から 5 番目に大きな値までを r の取り得る範囲と考えるようにする。次に d であるが、月次データであれば 1 から 11 を考えれば十分で

あろう。この様に取り得る値の候補が決まったら、その値に対して（４）で示された結合周辺分布から r と d の結合周辺事後密度を計算する。その後で合計が 1 になるように規準化して、 r と d の事後平均を計算する。Geweke=Terui (1993) はこの推定量を利用して予測を行っている。パラメータの推定に利用しようとするれば、推定した r と d の事後平均に基づいて状態毎にデータ行列を作成して普通の回帰モデルと同じ要領で推定することになろう。

3.2 MCMCによるサンプリング⁶

事前分布として以下の通り無情報事前分布を仮定する。

$$p(\mathbf{b}^{(j)}, \sigma_j^2) = p(\mathbf{b}^{(j)}) p(\sigma_j^2) \propto (\sigma_j^2)^{-1}$$

ただし $\mathbf{b}^{(j)} = (b_0^{(j)}, b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, \dots, b_p^{(j)})'$, σ_j^2 $j=1, 2$. である。

また閾値 r については $U(a, b)$ 、つまり a から b までの一様分布を仮定する。その場合の事後分布は以下の通りである。

$$p(\mathbf{b}^{(1)} | \sigma_1^2, \sigma_2^2, r, d, y) \sim N(\mathbf{b}_*^{(1)}, V_*^{-1})$$

$$p(\mathbf{b}^{(2)} | \sigma_1^2, \sigma_2^2, r, d, y) \sim N(\mathbf{b}_*^{(2)}, V_*^{-1})$$

$$\text{ただし } \mathbf{b}_*^{(j)} = (X_j^{*'} X_j^*)^{-1} X_j^{*'} y_j^* \quad V_{*j} = \frac{X_j^{*'} X_j^*}{\sigma_j^2} \quad j=1, 2.$$

$$p(\sigma_j^2 | \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, r, d, y) \sim IG\left(\frac{T_j}{2}, \frac{T_j s_j^2}{2}\right) \quad \text{ただし } IG \text{ は逆ガンマ分布を表す。また}$$

$$s_j^2 = \frac{1}{T_j} (y_j^* - \hat{y}_j)' (y_j^* - \hat{y}_j), \quad \hat{y}_j = X_j^* \mathbf{b}^{(j)} \quad \text{である。}$$

$\mathbf{b}^{(1)}$, σ_1^2 , $\mathbf{b}^{(2)}$ と σ_2^2 については Gibbs サンプリング、 r についてはランダム・ウォーク・チェーンでサンプリングする。 d の推定は以下のようにして行った。最初に d を固定した上で他のパラメータをベイズ推定し、推定結果を利用して d ごとに AIC を計算する。最終的に最小の AIC をもたらす d を推定値として選択した。⁷

d 以外のパラメータのサンプリングは以下の手順で行う。 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, y, d$ を固定した上で最初に r をサンプリングする。その際には r が極端に小さな値や大きな値とならない様にした。その後で $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \mathbf{b}^{(2)}, y, d$ と直前にサンプリングした r を用いて $\mathbf{b}^{(1)}$ をサンプリングする。この後は $\sigma_1^2, \sigma_2^2, y, d$ と直前にサンプリングした r と $\mathbf{b}^{(1)}$ を利用して $\mathbf{b}^{(2)}$ をサンプリングする。同様に直前の推定値を利用して σ_1^2, σ_2^2 の順番でサンプリングする。1 通りサンプリングが終わったら、また r のサンプリングを行うという作業を何度も繰り返す。本論文では最初に 2000 回のサンプリングを行った後、さらに 8000 回のサンプリングを行った。パラメータの推定値としては 8000 回のサンプリングで得られた値の平均が事後平均に当たると考えて推定値とし

ている。MCMC法の詳細については中妻（2003）を参考にされたい。

4. 実証分析

前節までは1変量のTARモデルの理論と推定方法を解説した。本節ではその結果を利用して金利データの分析を行ってみよう。推定の前に金利データを用いた理由を説明しておこう。TARモデルでは過去の価格水準などを基準にして状態変化を考える。しかし同じ価格でも、過去の価格と現在の価格では価格の持つ価値は異なる。したがって長期にわたる時系列データを用いた分析にTARモデルを適用すると、水準の持つ意味が変化してしまうので、この方法を使いにくい。しかしながら金利データの場合、金利水準は過去と現在で価値に違いがあるわけでもないから、利用可能である。もっともティックデータを用いた分析であれば短期間に集められた膨大なデータなので、この様な心配は不要となる。ゆえに裁定取引の分析をティックデータとTARモデルを用いて分析する場合には問題が発生しないであろう。

前述したPfann=Schotman=Tschernig（1996）と同様に本論文では米国3ヶ月ものの金利の月次データを利用して分析する⁸。彼らは1960年1月から1990年12月を分析しているが、本論文では期間を延ばして1960年1月から2003年12月の44年間を分析する。彼らは金利に平均回帰モデルを初めとする幾つかのモデルを試している。本論文でも自己回帰モデルの他に平均回帰モデルも扱うが、閾値モデルの紹介なので平均回帰型のモデルとしては最も簡単なボラティリティーの冪数（べき数）が1のモデルを扱う。

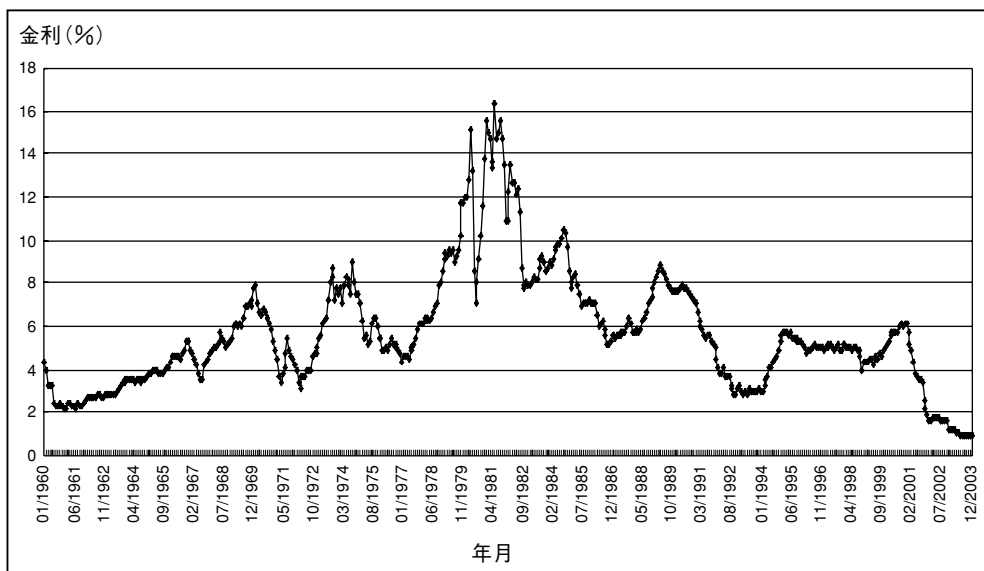


図1 米国3ヶ月ものの金利の推移（1960.1—2003.12）

標本期間中の金利であるが、図 1 に示すとおりである。1960年 8 月から1981年 5 月にかけて金利は上昇し、それ以降は下落というのが全体の推移である。全体的に大きく変動していると言える。特に1979年 6 月から1982年10月にかけて大きな変動期となっている。

最初に金利が自己回帰モデルに従うと仮定して推定を行った結果を表 1 と表 2 に示しておいた。2つの状態を考え、過去の値によって2つの自己回帰モデルの一方が選択される。次に金利が平均回帰モデルに従うと仮定して推定した結果を表 3 に記しておいた。2つの状態を考え、過去の金利の値によって2つの平均回帰モデルの一方が選択される。

自己回帰モデルの場合であるが、モデルとしては2通りある。1つは金利変動分 Δy_t に対して自己回帰モデルを考える場合と、金利 y_t に対して自己回帰モデルを考える場合である。

前者で推定するモデルは

$$dy_t = b_0 + b_1 dy_{t-1} + u$$

である。これを離散的に記述すれば以下になる。

$$\Delta y_t = b_0 + b_1 \Delta y_{t-1} + u_t$$

この単純回帰モデルで d 期前の金利の取る値によってモデルが変化するとしよう。数式で書けば、

$$\Delta y_t = b_0^{(1)} + b_1^{(1)} \Delta y_{t-1} + u^{(1)}_t \quad \Delta y_{t-d} \leq r$$

$$\Delta y_t = b_0^{(2)} + b_1^{(2)} \Delta y_{t-1} + u^{(2)}_t \quad \Delta y_{t-d} > r$$

である。このモデルを推定した結果が表 1 である。

r のランダム・ウォーク・チェーンによるサンプリングに当たっては、平均 0 の正規分布に従う確率変数の実現値を直前の値に加えることにしている。その際に用いた正規分布の標準偏差は金利差のデータの標準偏差としている。⁹

$d = 11$ と固定した上でバイズ推定を行った場合に AIC が最小だったので、遅れ変数は 11 と判断された。また閾値は 0.1416 と推定された。金利が 0.1416 よりも多く増加する場合であるが、標準偏差から見て

$$\Delta y_t = u_t \quad \Delta y_{t-11} > 0.1416$$

というランダムウォークモデルが推定された。また金利が 0.141 以下の上昇あるいは下落の場合は、

$$\Delta y_t = 0.5787 \Delta y_{t-1} + u_t \quad \Delta y_{t-11} \leq 0.1416$$

という定数項のない 1 階の自己回帰モデルと推定された。

表1：TARモデルの推定結果

	事後平均	事後標準偏差	事後自己相関
$b_0^{(1)}$	0.004878	0.020304	0.023249
$b_1^{(1)}$	0.578676	0.052599	-0.020223
$\sigma^{2(1)}$	0.157818	0.011465	0.012177
$b_0^{(2)}$	-0.015223	0.048403	0.026006
$b_1^{(2)}$	0.107148	0.069454	0.027465
$\sigma^{2(2)}$	0.322861	0.041473	0.003279
r	0.141605	0.006478	0.925620

※閾値の採択率：0.0162，状態1のデータ数：381，状態2のデータ数：136，AIC=-2.9945

次に金利そのものに関する自己回帰モデルは以下の通りである。

$$y_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + u_t$$

この単純回帰モデルで d 期前の金利の取る値によってモデルが変化するとしよう。数式で書けば、

$$y_t = b_0^{(1)} + b_1^{(1)} y_{t-1} + u_t^{(1)} \quad y_{t-d} \leq r$$

$$y_t = b_0^{(2)} + b_1^{(2)} y_{t-1} + u_t^{(2)} \quad y_{t-d} > r$$

である。このモデルを推定した結果が表2である。

表2：TARモデルの推定結果

	事後平均	事後標準偏差	事後自己相関
$b_0^{(1)}$	-0.045773	0.0372404	-0.0032376
$b_1^{(1)}$	1.017186	0.0080136	0.0020528
$\sigma^{2(1)}$	0.049454	0.00462915	0.3485529
$b_0^{(2)}$	0.107164	0.17216057	0.0139591
$b_1^{(2)}$	0.979422	0.01983050	0.0179708
$\sigma^{2(2)}$	0.562542	0.0636951	0.1174448
r	6.028975	0.1657146	0.9289667

※閾値の採択率：0.0139，状態1のデータ数：327，状態2のデータ数：190，AIC=-3.577

この場合も $d=11$ と固定した上でベイズ推定を行った場合にAICが最小だったので、遅れ変数は11と判断された。また閾値は6.029と推定された。閾値6.029に関係なくどちらの状態でも

定数項なしの自己回帰モデル

$$y_t = b_1 y_{t-1} + u_t$$

である。またパラメータ b_1 が 0.9794 と 1.0172 であり、標準偏差から見てランダムウォークモデルであることを棄却できない。

最後に平均回帰モデルである。平均回帰モデルとは変数が平均値から離れた場合に平均値へ戻るように価格変化が変化するモデルのことである。金利 y がその平均 μ から正の方向に離れた場合、その変化額 dy は負の値になり、金利 y がその平均 μ から負の方向に離れた場合、その変化額 dy は正の値になり、平均値に近づこうとするというものである。数式で表せば以下のようになる。

$$dy = \beta (y_{t-1} - \mu) + u_t$$

これを離散的に記述すれば以下のようになる。

$$\Delta y_t = \beta (y_{t-1} - \mu) + u_t$$

ただし、 $\beta < 0$ である。ここで上の式を展開すると、

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= -\beta \mu + \beta y_{t-1} + u_t \\ &= b_0 + b_1 y_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

という単純回帰モデルになる。ただし $b_0 = -\beta \mu$ 、 $b_1 = \beta$ であるから $b_0 > 0$ 、 $b_1 < 0$ が符号条件となる。この平均回帰モデルで、1 期前の金利の取る値によってモデルが変化するとしよう。数式で書けば、

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= b_0^{(1)} + b_1^{(1)} y_{t-1} + u^{(1)}_t & y_{t-1} \leq r \\ \Delta y_t &= b_0^{(2)} + b_1^{(2)} y_{t-1} + u^{(2)}_t & y_{t-1} > r \end{aligned}$$

である。このモデルを推定した結果が表 3 である。

表 3：TARモデルの推定結果

	事後平均	事後標準偏差	事後自己相関
$b_0^{(1)}$	-0.008941	0.041036	-0.054191
$b_1^{(1)}$	0.001381	0.008805	-0.051066
$\sigma^{2(1)}$	0.057430	0.004114	0.0311355
$b_0^{(2)}$	0.552033	0.304794	-0.010029
$b_1^{(2)}$	-0.061433	0.032010	-0.011023
$\sigma^{2(2)}$	0.718667	0.087858	0.000590
r	7.038471	0.040433	0.522407

※閾値の採択率：0.0935，状態 1 のデータ数：385，状態 2 のデータ数：142

推定結果によれば閾値として1期前の r_{t-1} について7.0385考える。閾値7.0385を境にモデルが変化することが判る。金利が7.0385を超えた場合であるが、推定量の標準偏差から見て、以下のような平均回帰モデルであると考えられる。

$$\Delta y_t = 0.558 - 0.0614 y_{t-1} + u_t^{(1)} \quad y_{t-1} > 7.0385$$

しかし金利が7.0385以下の場合、 $\Delta y_t = u_t$ であるからランダムウォークモデルになる。

5. 結論

本論文では第2節でTARモデルの説明を行った。次に第3節でその推定方法として、ベイズ統計学に基づいて解析的に推定する方法とMCMC法を用いて推定する方法を取り上げて説明した。第4節では米国3ヶ月もの金利を例にして、閾値を組み込んだ平均回帰モデルと自己回帰モデルの推定を行ってみた。その結果、利回りの変化 Δy に関する自己回帰モデルでは、閾値が0.1416と推定された。金利が0.1416よりも多く増加する場合にはランダムウォークモデルが推定された。また金利が0.1416以下の上昇あるいは下落の場合には、 Δy に関する定数項のない1階の自己回帰モデルと推定された。

次に金利そのものの自己回帰モデルでは閾値が6.029であった。モデルは閾値に関係なく、ランダムウォークモデルになると推定された。

平均回帰モデルでは1期前の金利が7.0385を超えた場合、推定量の標準偏差から見て平均回帰モデルになると考えられる。しかし金利が7.0385以下の場合、 $\Delta y_t = u_t$ であるからランダムウォークモデルになると推定された。

本論文はTARモデルとその推定方法の紹介に重点を置いているので、第4節の実証分析を簡単に済ませている。たとえば状態が2個の場合だけを扱っているが、3個以上の場合も考えられる。また自己回帰モデルの次数も状態ごとに変えることも可能である。これらの推定作業とモデルの吟味は今後の課題としたい。

注

¹ 山本（1988）のp24参照

² 強定常性では確率分布も仮定する。

³ 刈屋（2003）の10ページと24ページを参照されたい。

⁴ 刈屋＝照井（1997）の第7章で彼らの推定方法が紹介されている。

⁵ 行列表示の部分の説明はChen＝Lee（1995）の説明を参考に行っている。

- ⁶ フルコンディショナルな事後分布の導出については中妻（2002）を参考になっている。事後分布の導出の詳細については付録を参照されたい。
- ⁷ Goldman=Agbeyegbe（2003）に従っている。
- ⁸ Board of Governors of Federal Reserve SystemのHPのTreasury billsのSecondary market（3ヶ月もの）からデータを採取した。
- ⁹ 金利水準のモデルの推定では金利の標本標準偏差を利用している。また平均回帰モデルでは標準偏差を0.1にチューニングした。

参考文献

- [1] Balke,N.S. and Fomby,T.B.,1997, “Threshold Cointegration,” *International Economic Review*, Vol.38,pp627-645.
- [2] Bauwens,L.,Lubrano,M. and Richard,J-F.,1999, “Bayesian Inference in Dynamic Econometric Models,” *Oxford Univ. Press*.
- [3] Chen,C.W.S. and Lee,J.C.,1995, “Bayesian Inference of Threshold Autoregressive Models,” *Journal of Time Series Analysis*, Vol.16,pp483-492.
- [4] Forbes,C.S. Kalb,G.R.J. and Kofman,P.,1997, “Bayesian Arbitrage Threshold Analysis,” *Journal of Business & Economic Statistics*,Vol.17,pp364-372.
- [5] Geweke,J. and Terui,N.,1993, “Bayesian Threshold Autoregressive Models for Nonlinear Time Series,” *Journal of Time Series Analysis*, Vol.14,pp441-454.
- [6] Goldman,E. and Agbeyegbe,T.D.,2003, “Non-linearity in UK and US Short-term Interest Rate Data: Estimation of a Threshold-CKLS Model with ARMA-GARCH Error,” mimeography.
- [7] 刈屋武昭, 2003, 「金融時系列分析入門」『経済時系列の統計』, 岩波書店.
- [8] 刈屋武昭・照井伸彦, 1997, 『非線形経済時系列分析法とその応用』, 岩波書店.
- [9] Martens,M., Kofman,P., and Vorst,T.C.F.,1998, “A Threshold Error-Correction Model for Intraday Futures And Index Returns,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol.13,pp245-263.
- [10] 中妻照雄, 2002, 「マルコフ連鎖モンテカルロ法によるバイズ分析—回帰モデルへの応用—」三田学会雑誌, Vol.94,pp.181-207.
- [11] 中妻照雄, 2003, 『ファイナンスのためのMCMC法によるバイズ分析』, 三菱経済研究所.
- [12] Pfann,G.A. Schotman,P.C. and Tschernig,R.,1996, “Nonlinear Interest Rate Dynamics and Implication for the Term Structure,” *Journal of Econometrics*,Vol.74,pp149-176.
- [13] Tsay,R.S.,1989, “Testing and Modeling Threshold Autoregressive Processes,” *Journal of American Statistical Association*,Vol.84,231-240.
- [14] 山本 拓, 1988, 『経済の時系列分析』, 創文社.

付録

\mathbf{b}_j と σ_j^2 のフルコンディショナルな事後分布の計算

$j=1, 2$ の場合、

$$\mathbf{y}_j^* = \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}^{(j)} + \mathbf{u}^{(j)} \quad \mathbf{u}^{(j)} \sim N(0, \sigma_j^2)$$

の尤度は以下の通りである。

$$\text{Likelihood} \propto \exp \left(- \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\sigma_j^2} (\mathbf{y}_j^* - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}^{(j)})' (\mathbf{y}_j^* - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}^{(j)}) \right) \div (\sigma_1^{T_1} \sigma_2^{T_2})$$

$\mathbf{b}^{(j)}$ と σ_j^2 の結合事前密度が $p(\mathbf{b}^{(j)}, \sigma_j^2) \propto \frac{1}{\sigma_j^2}$ であることを用いて、まず結合事後密度を計算しよう。計算に先立ってまず尤度を以下のように式変形する。

$$\text{Likelihood} \propto \exp \left(- \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\sigma_j^2} (\mathbf{y}_j^* - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}^{(j)})' (\mathbf{y}_j^* - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}^{(j)}) \right) \div (\sigma_1^{T_1} \sigma_2^{T_2})$$

ここで指数部分を以下のように式変形する。

$$\begin{aligned} & (\mathbf{y}_j^* - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}^{(j)})' (\mathbf{y}_j^* - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}^{(j)}) \\ &= (\mathbf{y}_j^* - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}_*^{(j)} - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}^{(j)} + \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}_*^{(j)})' (\mathbf{y}_j^* - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}_*^{(j)} - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}^{(j)} + \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}_*^{(j)}) \\ &= (\mathbf{y}_j^* - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}_*^{(j)})' (\mathbf{y}_j^* - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}_*^{(j)}) + (\mathbf{b}^{(j)} - \mathbf{b}_*^{(j)})' \mathbf{X}_j^{*'} \mathbf{X}_j^* (\mathbf{b}^{(j)} - \mathbf{b}_*^{(j)}) \end{aligned}$$

であるから、 $(\mathbf{y}_j^* - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}_*^{(j)})' (\mathbf{y}_j^* - \mathbf{X}_j^* \mathbf{b}_*^{(j)})$ を S_j^2 と記述すれば

$$\text{Likelihood} \propto \exp \left(- \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\sigma_j^2} \left[S_j^2 + (\mathbf{b}^{(j)} - \mathbf{b}_*^{(j)})' \mathbf{X}_j^{*'} \mathbf{X}_j^* (\mathbf{b}^{(j)} - \mathbf{b}_*^{(j)}) \right] \right) \times (\sigma_1^2)^{-(T_1/2)} (\sigma_2^2)^{-(T_2/2)}$$

である。 $p(\mathbf{b}^{(j)}, \sigma_j^2) \propto \frac{1}{\sigma_j^2}$ を掛けて、 $\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ の結合事後密度が計算される。

$$p(\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \sigma_1^2, \sigma_2^2 | r, d, y)$$

$$\propto \exp \left(- \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\sigma_j^2} \left[S_j^2 + (\mathbf{b}^{(j)} - \mathbf{b}_*^{(j)})' \mathbf{X}_j^{*'} \mathbf{X}_j^* (\mathbf{b}^{(j)} - \mathbf{b}_*^{(j)}) \right] \right) \times (\sigma_1^2)^{-(T_1/2+1)} (\sigma_2^2)^{-(T_2/2+1)}$$

したがって $\mathbf{b}^{(j)}$ のフルコンディショナルな事後密度は以下のように計算される。

$$p(\mathbf{b}^{(j)} | \sigma_1^2, \sigma_2^2, r, d, y) \propto \exp \left(- \frac{1}{2\sigma_j^2} \left[(\mathbf{b}^{(j)} - \mathbf{b}_*^{(j)})' \mathbf{X}_j^{*'} \mathbf{X}_j^* (\mathbf{b}^{(j)} - \mathbf{b}_*^{(j)}) \right] \right) \times (\sigma_j^2)^{-2/2}$$

これは平均 $\mathbf{b}_*^{(j)}$ 、分散 $\sigma_j^2 (\mathbf{X}_j^{*'} \mathbf{X}_j^*)^{-1}$ の正規分布の密度関数であるから、次式が導出される。

$$p(\mathbf{b}^{(j)} | \sigma_1^2, \sigma_2^2, r, d, y) \sim N(\mathbf{b}_*^{(j)}, \sigma_j^2 (\mathbf{X}_j^{*'} \mathbf{X}_j^*)^{-1}) \quad j=1, 2$$

次に σ_j^2 のフルコンディショナルな事後密度を計算してみよう。事前分布 $p(\sigma_j^2) = \frac{1}{\sigma_j^2}$ を尤度に掛ける。

$$\begin{aligned}
 p(\sigma_1^2, \sigma_2^2 | \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, r, d, y) &= \text{Likelihood} \times p(\sigma_1^2) \times p(\sigma_2^2) \\
 &\propto \exp\left(-\sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\sigma_j^2} (y_j^* - X_j^* \mathbf{b}^{(j)})' (y_j^* - X_j^* \mathbf{b}^{(j)})\right) \div (\sigma_1^{T_1} \sigma_2^{T_2}) \times \frac{1}{\sigma_1^2} \times \frac{1}{\sigma_2^2} \\
 &\propto (\sigma_1^2)^{-(T_1/2+1)} (\sigma_2^2)^{-(T_2/2+1)} \exp\left(-\sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\sigma_j^2} (y_j^* - X_j^* \mathbf{b}^{(j)})' (y_j^* - X_j^* \mathbf{b}^{(j)})\right) \\
 &\propto (\sigma_1^2)^{-(T_1/2+1)} (\sigma_2^2)^{-(T_2/2+1)} \exp\left(-\sum_{j=1}^2 \frac{T_j s_j^2}{2\sigma_j^2}\right)
 \end{aligned}$$

ただし、 $s_j^2 = \frac{1}{T_j} (y_j^* - \hat{y}_j)' (y_j^* - \hat{y}_j)$ 、 $\hat{y}_j = X_j^* \mathbf{b}^{(j)}$ である。

ここで σ_j^2 のフルコンディショナルな事後密度は以下のようになる。

$$p(\sigma_j^2 | \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, r, d, y) \propto (\sigma_j^2)^{-(T_j/2+1)} \exp\left(-\frac{T_j s_j^2}{2\sigma_j^2}\right)$$

これは逆ガンマ分布の密度関数であるから、次式が導出される。

$$p(\sigma_j^2 | \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, r, d, y) \sim IG\left(\frac{T_j}{2}, \frac{T_j s_j^2}{2}\right) \quad j=1, 2$$

ただし IG は逆ガンマ分布を表す。

Bayesian Estimation of Threshold Auto Regressive Model —Applied to Time Series Analysis for U.S. Interest Rate—

Hiroshi SUNADA

(Department of Public Policy and Social Studies,
Faculty of Literature and Social Sciences)

In this paper we introduced TAR (Threshold Auto Regressive Model) and show how to estimate TAR model by Bayesian MCMC method. We analyzed U.S. interest rate (3 month) by three types of TAR model, model for difference of yield, that of yield, mean reverting model.

In this paper we estimate 2 regime TAR model whose order is commonly 1, by Bayesian MCMC method.

We find three things. The first is that threshold of TAR model for difference of yield is 0.1416 and models are different at regimes. The second is that threshold of TAR model for yield is 6.029 and models are same. The third is that threshold of mean reverting model is 7.0835 and models are different at regimes.